Contenido

[1. Derivada de una función de una variable 2](#_Toc148440468)

[1.1. Interpretación geométrica de la derivada 2](#_Toc148440469)

[1.2. Tabla de derivadas 3](#_Toc148440470)

[2. Derivadas parciales de una función de 2 variables 4](#_Toc148440471)

[2.1. Interpretación geométrica de la derivada parcial 4](#_Toc148440472)

[3. Gradiente de una función 5](#_Toc148440473)

[3.1. Operador nabla 5](#_Toc148440474)

[3.2. Gradiente de una función 5](#_Toc148440475)

[3.3. Interpretación geométrica del gradiente de una función en 2D 5](#_Toc148440476)

[3.4. Interpretación geométrica del gradientes en 3D 6](#_Toc148440477)

[4. Matriz hessiana. 7](#_Toc148440478)

[4.1. Derivadas de orden superior 7](#_Toc148440479)

[4.2. Definición matriz hessiana 7](#_Toc148440480)

[5. Aplicaciones en economía 8](#_Toc148440481)

[5.1. Crecimiento y decrecimiento 8](#_Toc148440482)

[5.2. Función demanda de un bien 8](#_Toc148440483)

[5.3. Función de producción 9](#_Toc148440484)

**Derivabilidad y diferenciabilidad**

# Derivada de una función de una variable

La derivada de una función f(x) en el punto x=x0 se define como el siguiente límite:

También se podría calcular la función derivada, usando una x genérica:

Matemáticamente, la derivada de una función f(x) en un punto x0, se representa:

f’(x0)

Mientras que la función derivada se representa con la incógnita x genérica:

f’(x)

## Interpretación geométrica de la derivada

Gráficamente la derivada de una función en un punto x0 es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto x0. En la gráfica de abajo, la derivada de f(x) en 6 sería:

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

## Tabla de derivadas

|  |  |
| --- | --- |
| **Función** | **Derivada** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

# Derivadas parciales de una función de 2 variables

Cuando se amplía a 2 variables la derivada no es única, si no que aparecen infinitas derivadas que se pueden tomar por infinitas direcciones; mientras que en funciones de una variable la única dirección posible era la del eje x. Ahora se verán las derivadas parciales, que son las derivadas que se corresponden a las direcciones del eje x y del eje y.

Las definiciones de derivada parcial en x y en y son:

También se pueden definir las funciones derivadas parciales:

## Interpretación geométrica de la derivada parcial

Como se puede observar para obtener una interpretación gráfica de la derivada parcial en x en un punto (x0,y0) conviene seguir una serie de pasos:

* Cortar la superficie con un plano vertical y=y0.
* Calcular la imagen f(x0, y0). En la imagen de abajo sería, el punto A que está contenido en el plano vertical.
* Trazar una recta tangente a la superficie en el punto A que esté contenida en el plano vertical.
* La derivada parcial en x en A =f(x0, y0, f(x0, y0)) es la pendiente de la recta tangente trazada en el punto anterior:

Gráfico, Gráfico radial

Descripción generada automáticamente

Análogamente se podría proceder para la derivada parcial en y.

# Gradiente de una función

## Operador nabla

Es un vector de derivadas parciales. Se define así:

* En 2 dimensiones:
* En 3 dimensiones:

## Gradiente de una función

Consiste en aplicar el vector nabla a una función.

* En 2 dimensiones: f(x, y):
* En 3 dimensiones: f(x, y, z):

## Interpretación geométrica del gradiente de una función en 2D

Al evaluar el gradiente a una función de 2 incógnitas nos da la dirección de máxima inclinación, es decir, el gradiente es un vector que apunta hacia el punto más alto de la función. Si dibujamos las curvas de nivel de la superficie de la imagen, quedarían circunferencias como se puede ver más abajo

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Diagrama, Dibujo de ingeniería

Descripción generada automáticamente

Como se ve los vectores gradientes apuntan hacia el centro de la circunferencia que es el punto más alto.

## Interpretación geométrica del gradiente en 3D

Al evaluar el gradiente a una función de 3 incógnitas nos da la dirección normal a la superficie. En la gráfica de abajo se pueden ver los gradientes positivos en rojo que salen hacia afuera y los gradientes negativos, en verde que se dirigen hacia el centro de la esfera.

Gráfico, Gráfico radial

Descripción generada automáticamente

# Matriz hessiana.

## Derivadas de orden superior

El cálculo de las derivadas parciales de orden superior consiste en volver a derivar la función derivada.

|  |  |
| --- | --- |
| Derivar 2 veces con respecto a x: |  |
| Derivar primero respecto a x y luego respecto a y |  |
| Derivar 2 veces respecto a y |  |
| Derivar primero respecto a y y luego respecto a x |  |

Nota: las derivadas cruzadas deben coincidir: fxy=fyx

## Definición matriz hessiana

Nota: dado que las derivadas cruzadas coinciden, la matriz hessiana es simétrica.

# Aplicaciones en economía

## Crecimiento y decrecimiento

La primera derivada de una función de una variable permite determinar el crecimiento y decrecimiento de la función.

|  |  |
| --- | --- |
| f'(x0)> 0 🡪 la función crece en el punto x0 | f'(x0)< 0 🡪 la función decrece en el punto x0 |

Esto es algo que también ocurre para funciones de más variables. Lo que pasa es que cuando hay más variables, al calcularse las derivadas parciales lo que se está viendo es cómo afecta la variación de la variable sobre la que se está derivando mientras se deja constante a las otras variables.

Se van a ver 3 funciones: función de demanda, de función de producción y función de utilidad. Las derivadas parciales de las funciones anteriores se les llamaran demanda marginal, producción marginal o utilidad marginal.

## Función demanda de un bien

Suele pensarse que la demanda de un bien depende del precio de éste, pero también puede depender de otros factores como son: el precio de los bienes sustitutivos, el precio de los bienes complementarios y la renta de los consumidores.

* Bienes sustitutivos: son bienes que entran en competencia con el bien sobre el que se está estudiando la demanda. Por ejemplo: 2 marcas diferentes del mismo producto. Por tanto, se espera que un aumento de los precios de los bienes sustitutivos haga aumentar la demanda del bien que se está estudiando; la demanda marginal de los precios de los bienes sustitutivos será por tanto positiva.
* Bienes complementarios: son productos que, si bien no son los mismos, se pueden o se deben usar conjuntamente de manera que se agregan valor mutuamente, por ejemplo, una impresora y la tinta. Se espera que un aumento del precio de los bienes complementarios haga bajar la demanda del bien que se está estudiando. La demanda marginal de los precios de los bienes complementarios será negativa.
* La renta de los consumidores es directamente proporcional a la demanda.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | D es la función de la demanda | |
| P1: precio del bien a estudiar |  |
| P2: precio del bien sustitutivo |  |
| P3: precio del bien complementario |  |
| R: renta de los consumidores |  |

Nota: aunque en la fórmula de arriba solo se presenta un bien sustitutivo y un bien complementario, en la práctica se pueden ver funciones con más productos de cada tipo con lo que el número de incógnitas aumentará.

## Función de producción

La función de producción se estudia con respecto al capital puesto en juego y a la mano de obra. Por ello la función de producción tiene 2 incógnitas, K que representa al capital y L que representa al trabajo.

En este caso las producciones marginales pueden ser tanto positivas como negativas.

## Función de utilidad

Cuando un consumidor obtiene un bien satisface con ello una necesidad. La función de utilidad mide en que medida el bien satisface las necesidades del consumidor.